

Einige Eigenschaften schwacher Tschebyscheff-Systeme

ROLAND ZIELKE

Universität Osnabrück, Fachbereich 5, 4500 Osnabrück, West Germany

Communicated by E. W. Cheney

Received December 2, 1976

EINFÜHRUNG

Sei M eine Teilmenge der reellen Zahlen und \mathbb{R}^M der lineare Raum der reellwertigen, auf M definierten Funktionen. Ein n -dimensionaler linearer Unterraum U von \mathbb{R}^M heißt schwach Haarscher Raum bzw. jede Basis von U heißt schwaches Tschebyscheff-System, wenn kein $f \in U$ öfter als $(n - 1)$ -mal stark das Vorzeichen wechselt bzw., in der Terminologie von [8], eine starke Alternante der Länge größer n hat. Ein Beispiel für schwach Haarsche Räume bilden etwa die polynomischen Splines (siehe [4, p. 18]).

In Verallgemeinerung des Alternantensatzes von de la Vallée-Poussin für gewöhnliche Haarsche Räume haben Jones und Karlovitz [3] gezeigt, daß, falls M ein abgeschlossenes Intervall und $U \subset C(M)$ ein n -dimensionaler linearer Raum ist, U genau dann die schwache Haarsche Bedingung erfüllt, wenn zu jedem $g \in C(M)$ ein Proximum $f \in U$ bezüglich der Maximumnorm auf M existiert, für das die Fehlerfunktion $r := f - g$ ihr betragsliches Maximum an $n + 1$ Punkten von M mit wechselndem Vorzeichen annimmt. Um zu zeigen, daß die schwache Haarsche Bedingung hinreichend ist, wurde in [3] als zentrales Hilfsmittel ein Grenzprozess für die Annäherung von U durch gewöhnliche Haarsche Räume benutzt, der in Karlin und Studden [4] ausführlich dargestellt ist. Wir werden im folgenden einige prinzipielle Eigenschaften schwach Haarscher Räume herleiten und mit ihrer Hilfe das Ergebnis von Jones und Karlovitz elementar beweisen. Dabei wird sich unter anderem ein vereinfachter Beweis des klassischen Resultates für gewöhnliche Haarsche Räume ergeben.

1. VORBEREITUNGEN

Aus [8] und [3] übernehmen wir folgende Festlegungen:

(1) Seien $f \in \mathbb{R}^M$ und $t_1, \dots, t_k \in M$ mit $t_1 < \dots < t_k$. t_1, \dots, t_k heißen eine starke Alternante von f (der Länge k), wenn $f(t_i) \cdot f(t_{i+1}) < 0$ für $i = 1, \dots, k - 1$ gilt.

(2) Ein n -dimensionaler linearer Unterraum U von \mathbb{R}^M heißt schwach Haarscher Raum, wenn kein $f \in U$ eine starke Alternante der Länge $> n$ hat.

LEMMA 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^M$ ein n -dimensionaler linearer Raum. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(a) U erfüllt die schwache Haarsche Bedingung.

(b) Sei f_1, \dots, f_n eine Basis von U . Für alle $t_1, \dots, t_n \in M$ mit $t_1 < \dots < t_n$ hat die Determinante $\det(f_i(t_j))$ schwach einheitliches Vorzeichen.

(c) Seien $u_1, \dots, u_{n-1} \in M$ mit $u_1 < \dots < u_{n-1}$, $u_0 = -\infty$, $u_n = +\infty$. Dann gibt es ein $f \in U \setminus \{0\}$ mit $f(u_1) = f(u_2) = \dots = f(u_{n-1}) = 0$ und $(-1)^i f(x) \geq 0$ für $x \in (u_{i-1}, u_i) \cap M$, $i = 1, \dots, n$.

Bemerkung. Jones und Karlovitz [3] beweisen Lemma 1 für den Fall, daß M ein Intervall und $U \subset C(M)$ ist, mit Hilfsmitteln, die auf die allgemeine Situation nicht übertragbar zu sein scheinen. Im übrigen setzen sie an die Stelle von (c) die Bedingung "WC-2", nämlich daß (c) nur für alle u_1, \dots, u_{n-1} mit $\inf M < u_1$ und $u_{n-1} < \sup M$ gelte. Falls M ein Intervall und $U \subset C(M)$ ist, sind (c) und "WC-2" also äquivalent. Im allgemeinen gilt dies jedoch nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $M = \{1, 2, 3\}$, und seien $f, g \in R^M$ definiert durch $f(1) = f(2) = g(3) = 0$ und $f(3) = g(1) = -g(2) = 1$. $U := \text{span}\{f, g\}$ erfüllt "WC-2", aber nicht (c).

Beweis von Lemma 1.

(b) \Rightarrow (c): Wir benutzen Induktion über $k := \dim U_{\{u_1, \dots, u_{n-1}\}}$.

$k = n - 1$: Sei $A_i = (u_i, u_{i+1}) \cap M$ für $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Sei

$$g(t) := \det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ t & u_1 & \dots & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_1(u_1) & \dots & f_1(u_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(t) & f_n(u_1) & \dots & f_n(u_{n-1}) \end{vmatrix} \quad \text{für } t \in M.$$

Für $t \in A_j$ ist

$$g(t) = (-1)^j \det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_n \\ u_1 & \dots & u_{j-1} & t & u_j & \dots & u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Die Determinante rechts hat nach Voraussetzung schwach einheitliches Vorzeichen und verschwindet wegen $\dim U = n$ nicht identisch.

$k + 1 \Rightarrow k$: Sei φ der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n - 1\}$$

so gewählt, daß $\varphi(u_{i_1}), \dots, \varphi(u_{i_k})$ linear unabhängig sind. Ferner sei $L := \{w \in M \mid \varphi(w) \in \text{span}\{\varphi(u_{i_1}), \dots, \varphi(u_{i_k})\}\}$ und L_ν das größte Intervall mit $u_\nu \in L_\nu \in L$ für $\nu = 1, \dots, n-1$.

Fall 1. Es gibt ein $\nu \in I := \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $[u_{\nu-1}, u_{\nu+1}] \cap M \not\subset L_\nu$, etwa $W := (u_{\nu-1}, u_\nu) \cap M \setminus L \neq \emptyset$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Hat W ein maximales Element x , so gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $g \in U \setminus \{0\}$ mit schwachen Vorzeichenwechseln in $u_1, \dots, u_{\nu-1}, x, u_{\nu+1}, \dots, u_{n-1}$. Da g auf L verschwindet, hat es die gewünschten Eigenschaften. Hat W kein maximales Element, so sei $x_1, x_2, \dots \in W$ eine streng monotone Folge mit $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \sup(W)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für jedes $m = 1, 2, \dots$ ein $h_m \in U$ mit $\|h_m\| = 1$, wobei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf U ist, und schwachen Vorzeichenwechseln in $u_1, \dots, u_{\nu-1}, x_m, u_{\nu+1}, \dots, u_{n-1}$. Da die Menge $S := \{f \in U \mid \|f\| = 1\}$ kompakt bezüglich der Normtopologie ist, hat die Folge $\{h_m\}$ einen Häufungspunkt $g \in S$. Da Normkonvergenz hier punktweise Konvergenz impliziert, hat g die gewünschten Eigenschaften.

Fall 2. Für jedes $\nu \in I$ gilt $[u_{\nu-1}, u_{\nu+1}] \cap M \subset L$. Sei dann $\nu \in I$ fest und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mu < \nu$ maximal, so daß $W := (u_\mu, u_{\mu+1}) \cap M \setminus L$ nicht leer ist. Der Rest des Beweises ist derselbe wie in Fall 1 mit dem einzigen Unterschied, daß, falls W ein maximales Element x hat, $g \in U \setminus \{0\}$ mit schwachen Vorzeichenwechseln in $u_1, \dots, u_\mu, x, u_{\mu+1}, \dots, u_{\nu-1}, u_{\nu+1}, \dots, u_{n-1}$ gebildet wird und sonst $h_m \in S$ mit schwachen Vorzeichenwechseln in $u_1, \dots, u_\mu, x_m, u_{\mu+1}, \dots, u_{\nu-1}, u_{\nu+1}, \dots, u_{n-1}$, $m = 1, 2, \dots$, gebildet wird.

(a) \Rightarrow (b): Sei f_1, \dots, f_n eine feste Basis von U . Wir nehmen an, es gäbe $x_1, \dots, x_n \in M$ und $y_1, \dots, y_n \in M$ mit $x_1 < \dots < x_n$, $y_1 < \dots < y_n$ und $\det(f_i(x_j)) \cdot \det(f_i(y_j)) < 0$. Da $\dim U|_{\{x_1, \dots, x_n\}} = \dim U|_{\{y_1, \dots, y_n\}} = n$ ist, gibt es ein y_{i_1} , so daß $\dim U|_{\{y_{i_1}, x_2, \dots, x_n\}} = n$ ist, weiter ein y_{i_2} mit $\dim U|_{\{y_{i_1}, y_{i_2}, x_3, \dots, x_n\}} = n$ usw. Also kann man $\{x_1, \dots, x_n\}$ schrittweise in $\{y_1, \dots, y_n\}$ so überführen, daß bei keinem Schritt die Determinante verschwindet. Bei einem Schritt muß dann die Determinante das Vorzeichen wechseln, etwa beim k -ten Schritt. Wir benennen die Punkte $y_{i_1}, \dots, y_{i_{k-1}}$, x_k, \dots, x_n um in z_1, \dots, z_n mit $z_1 < \dots < z_n$ und wählen eine Basis g_1, \dots, g_n von U mit $g_i(z_j) = \delta_{i,j}$ für alle i und j . Sei $y := y_{i_k}$ mit $z_j < y < z_{j+1}$, und y werde gegen z_k ausgetauscht. Natürlich wechselt die mit g_1, \dots, g_n gebildete Determinante bei diesem Schritt ebenfalls stark das Vorzeichen, und wegen

$$\det \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \\ z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix} = 1$$

folgt

$$0 > \det \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g_n \\ z_1, \dots, z_j, y, z_{j+1}, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n \end{pmatrix},$$

falls $j = 1, \dots, k - 2, k + 1, \dots, n$

$$> \det \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & \cdots & \cdots & g_n \\ z_1, \dots, z_{k-1}, y, z_{k+1}, \dots, z_n \end{pmatrix}, \quad \text{falls } j = k - 1, k.$$

Ausrechnung dieser Determinanten liefert

$$\begin{aligned} \text{sign } g_k(y) &= (-1)^{k-j}, & \text{falls } j &= 1, \dots, k - 2, \\ &= -1, & \text{falls } j &= k - 1, k, \\ &= (-1)^{k-j-1}, & \text{falls } j &= k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Sei nun $g \in U$ mit

$$\begin{aligned} g(z_\nu) &= (-1)^{j-1-\nu} \text{sign}(g_k(y)) & \text{für } \nu &= 1, \dots, j, \\ &= (-1)^{j-\nu} \text{sign}(g_k(y)) & \text{für } \nu &= j + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Man prüft nach, daß in jedem Fall $g(z_k) = 1$ ist. Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ hat $g_k + \epsilon g$ in $z_1, \dots, z_j, y, z_{j+1}, \dots, z_n$ eine starke Alternante der Länge $n + 1$ im Widerspruch zu (a).

(b) \Rightarrow (a): Wir nehmen an, es gäbe ein $h \in U$ und $x_1, \dots, x_{n+1} \in M$ mit $x_1 < \dots < x_{n+1}$ und $(-1)^i h(x_i) < 0$ für $i = 1, \dots, n + 1$. Sei $U_1 := U|_{\{x_1, \dots, x_{n+1}\}}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1. $\dim U_1 = n$. Sei g_1, \dots, g_n eine Basis von U_1 . Wegen

$$0 = \det \begin{pmatrix} h & g_1 & \cdots & g_n \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} h(x_i) \det \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & \cdots & \cdots & g_n \\ x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\det \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & \cdots & \cdots & g_n \\ x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n + 1,$$

und damit $\dim U_1 < n$, also ein Widerspruch.

Fall 2. $\dim U_1 = k < n$. Seien x_{i_1}, \dots, x_{i_k} mit $\dim U|_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}} = k$, und $t_{k+1}, \dots, t_n \in M$ so gewählt, daß $W := U|_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, t_{k+1}, \dots, t_n\}}$ die Dimension n hat.

Bezeichnen wir

$$\begin{aligned} z_\nu &= x_{i_\nu} & \text{für } \nu &\leq k \\ &= t_\nu & \text{für } \nu &\geq k + 1, \end{aligned}$$

so sind durch $g_i(z_j) = \delta_{i,j}$ eine Basis g_1, \dots, g_k von U_1 und eine Basis g_1, \dots, g_n von U festgelegt. Wegen $h \in U_1$ gilt $(h + g)(x_i) = h(x_i)$ für $i = 1, \dots, n + 1$ und jedes $g \in \text{span}\{g_{k+1}, \dots, g_n\}$.

Also können in t_{k+1}, \dots, t_n beliebige Werte für h vorgeschrieben werden.

Wir tun das in folgender Weise: Enthält $(x_\nu, x_{\nu+1})$ genau l_ν viele Punkte $p_1^\nu < \dots < p_{l_\nu}^\nu$ mit $p_i^\nu \in \{t_{k+1}, \dots, t_n\}$, so sei $h(p_i^\nu) := (-1)^i h(x_\nu)$, $i = 1, \dots, l_\nu$.

Ist l gerade, so verlängert sich dadurch die Alternante von h um l viele Punkte. Ist l ungerade, so verlängert sich dadurch die Alternante von h um $l - 1$ viele Punkte, und wegen $\text{sign } h(p_{l_\nu}^\nu) = \text{sign } h(x_{\nu+1})$ kann $x_{\nu+1}$ in der Alternanten durch $p_{l_\nu}^\nu$ ersetzt werden. So erhält man in jedem Fall eine starke Alternante y_1, \dots, y_{n+1} von h der Länge $n + 1$, die aus den Punkten t_{k+1}, \dots, t_n und $k + 1$ Punkten $x_{j_1} < \dots < x_{j_{k+1}}$ besteht.

Gilt $\dim U|_{\{y_1, \dots, y_{n+1}\}} = n$, so liegt erneut Fall 1 vor.

Gilt $\dim U|_{\{y_1, \dots, y_{n+1}\}} < n$, so folgt $\dim U|_{\{x_{j_1}, \dots, x_{j_{k+1}}\}} < k$. Dann setze man $U_2 := U|_{\{x_{j_1}, \dots, x_{j_{k+1}}\}}$ und verfähre für U_2 wie für U_1 in Fall 2.

Damit ergibt sich dann eine starke Alternante $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n+1}$, bezgl. der U eine größere Dimension als bezgl. y_1, \dots, y_{n+1} hat. Nach endlich vielen Schritten gelangt man zu Fall 1.

(c) \Rightarrow (b): Wir folgen wörtlich dem Beweisteil (a) \Rightarrow (b) und merken zusätzlich an, daß g_k in y und z_k nicht verschwindet und in $z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n$ Nullstellen hat. Wegen (c) existiert ein $h \in U \setminus \{0\}$ mit den selben Nullstellen, das in diesen schwach das Vorzeichen wechselt und zwischen je zwei benachbarten von ihnen schwach konstantes Vorzeichen hat. Da U auf $\{z_1, \dots, z_n\}$ ein Haarscher Raum ist, ist h ein skalares Vielfaches von g_k . Dann hat aber h in y oder z_k das "falsche" Vorzeichen.

Das folgende Resultat wurde unabhängig von Sommer und Strauss [6] mittels des oben erwähnten Grenzprozesses bewiesen. Unser Beweis ist eine abgekürzte Version des Beweises von Stockenberg [7], der seinerseits auf [8] fußt.

SATZ 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^M$ ein n -dimensionaler schwach Haarscher Raum. Dann enthält U einen $(n - 1)$ -dimensionalen schwach Haarschen Raum.

Beweis. Sei $\tilde{M} = \{x \in M \mid g(x) \neq 0 \text{ für ein } g \in U\}$. Für alle $x \in \tilde{M}$ ist dann

$$N_x := \{g \in U \mid g(x) = 0\}$$

ein $(n - 1)$ -dimensionaler linearer Raum. Für $x \in \tilde{M}$ sei ferner $A_x := \{g \in U \mid g \text{ hat in } M \cap [x, \infty) \text{ eine starke Alternante der Länge } n\}$. Dann ist A_x offen in U bezgl. der von einer bzw. jeder Norm auf U erzeugten Topologie. (siehe Lemma 5 in [8]). Wir nehmen an, es gäbe ein $x \in \tilde{M}$ mit $A_x \cap N_x \neq \emptyset$. Sei etwa $h \in A_x \cap N_x$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei h rechts von x zuerst positiv. Sei $f \in U$ mit $f(x) = 1$. Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ hat dann $h - \epsilon f$ in x und den n Alternantenpunkten von h eine $(n + 1)$ -stellige Alternante im Widerspruch zur Voraussetzung. Also folgt $N_x \subset B_x := U \setminus A_x$ für alle $x \in \tilde{M}$, und außerdem ist B_x abgeschlossen. Nach Lemma 6 in [8] enthält dann $B := \bigcap_{x \in \tilde{M}} B_x$ einen $(n - 1)$ -

dimensionalen linearen Raum N . Außerdem ist $B = U \setminus A$, wobei $A = \{g \in U \mid g \text{ hat eine starke Alternante der Länge } n \text{ auf } M\}$.

Da N mit A leeren Durchschnitt hat, ist N ein schwach Haarscher Raum.

2. HAUPTRESULTATE

Sei im folgenden $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $U \subset C(M)$ ein n -dimensionaler linearer Raum.

Für $r \in C(M)$ nennen wir Punkte $x_1, \dots, x_k \in M$ mit $x_1 < \dots < x_k$ und $r(x_i) \cdot r(x_{i+1}) = -\|r\|^2$ für $i = 1, \dots, k - 1$ eine k -stellige Extremalalternante (EA) von r .

SATZ 2 (Alternantensatz). Sei U schwach Haarsch, $f \in C(M)$ und $V \subset U$ die Menge aller besten Approximationen an f bezüglich der Maximumnorm auf M . Dann gibt es ein $g \in V$, so daß $r := f - g$ eine $(n + 1)$ -stellige EA hat.

Beweis. Sei k maximal, so daß für ein $g \in V$ die Fehlerfunktion eine k -stellige EA hat. Ist die Behauptung für alle schwach Haarschen Räume mit niedrigerer Dimension als n richtig, so können wir uns im folgenden wegen Satz 1 auf den Fall $k \geq n$ beschränken.

Für $n = 1$ liefert dies zugleich den Induktionsanfang.

Wir nehmen an, es sei $k = n$ und $W \subset V$ die Menge aller Funktionen mit einer n -stelliger EA der Fehlerfunktion. Für $g \in W$ mit einer zugehörigen EA $x_1, \dots, x_n \in M$ der Fehlerfunktion und $x_0 := a, x_{n+1} := b$ sei $E_i := \{x \in M \cap [x_{i-1}, x_{i+1}] \mid r(x) = r(x_i)\}$ für $i = 1, \dots, n$, $I_i = [a_i, b_i]$ jeweils das kleinste Intervall, das E_i enthält.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $r(x) = \|r\|$ für $x \in E_1$. Ferner sei $A = \{h \in U \setminus \{0\} \mid (-1)^i h(y_i) \leq 0 \text{ für alle } y_i \in I_i \text{ und } i = 1, \dots, n\}$ und $N_h := \{x \in E_1 \cup \dots \cup E_n \mid h(x) = 0\}$ für $h \in U$. Wegen Lemma 1 ist A nicht leer.

Wir zeigen zunächst folgende *Zwischenbehauptung*: Es gibt ein $h \in A$, so daß für alle $\hat{h} \in A$ gilt: $N_{\hat{h}} \subset N_h$.

Beweis. Man zeigt leicht, daß A ein abgeschlossener Kegel ist. Für $f \in A$ sei $G_f := \{g \in A \mid N_f \subset N_g\}$. Offenbar ist G_f konvex. Sei $B = \{h \in A \mid \|h\| = 1\}$ und $g_1 \in B$ beliebig fest gewählt. Sei $\{f_n\}_1^\infty \subset B$ eine in B dichte Folge, und f_{n_1} das erste Glied dieser Folge mit $f_{n_1} \notin G_{g_1}$. Sei dann

$$g_2 := f_1 + (f_{n_1}/2) \text{ und damit } N_{g_2} \subsetneq N_{g_1} \text{ und } G_{g_1} \cup \{f_1, \dots, f_{n_1}\} \subset G_{g_2}.$$

Zu g_1 konstruiert man analog $g_3 := g_2 + (1/2^2)f_{n_2}$ usw., allgemein $g_{i+1} = g_i + (1/2^i)f_{n_i}$.

Entweder es ist $G_{g_\nu} = A$ für ein ν , also $N_{g_\nu} \subset N_f$ für alle $f \in A$, und die Aussage ist bewiesen. Oder es gibt eine unendliche Folge $\{g_\nu\}_1^\infty$ in A mit

$$N_{g_{\nu+1}} \subsetneq N_{g_\nu}, G_{g_\nu} \cup \{f_1, \dots, f_{n_\nu}\} \subset G_{g_{\nu+1}}, \quad (*)$$

$$\begin{aligned} |g_\nu(x)| &\leq |g_{\nu+1}(x)| && \text{für } x \in I_1 \nu \cdots \nu I_n, && (**) \\ \|g\| &\leq 2 && \text{für } \nu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Die Folge $\{g_\nu\}_1^\infty$ hat einen Häufungspunkt $g_\infty \in A$, und o.B.d.A. konvergiere sie gegen diesen. Wegen $(**)$ folgt $N_{g_\infty} = \bigcap_{x=1}^\infty N_{g_\nu}$. Sei nun $g \in B$ beliebig und $x \in N_{g_\infty}$. Dann ist also $g_\nu(x) = 0$ für alle ν , und damit wegen $(*)$ $f_\nu(x) = 0$ für alle ν . Da $\{f_\nu\}_1^\infty$ dicht in B ist, folgt $g(x) = 0$.

Also gilt $N_{g_\infty} \subset N_g$ für jedes $g \in B$ bzw. $B \subset G_{g_\infty}$, was trivialerweise $A \subset G_{g_\infty}$ impliziert, und die Aussage ist bewiesen.

Sei nun $h \in A$ eine Funktion wie in der Zwischenbehauptung. Ist N_h leer, so hat $r - \epsilon h$ für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ eine kleinere Norm als r im Widerspruch zu $g \in V$. Also ist N_h nicht leer; sei etwa $x \in N_h \cap E_\mu$.

Für $w \in W$ sei $E_i(w)$ die i -te Extremalmenge, $i = 1, \dots, n$, $I_i(w) = [a_i^{(w)}, b_i^{(w)}]$, usw.

Sei $\tilde{W} = \{w \in W \mid x \in E_\mu(w)\}$. Wegen $g \in \tilde{W}$ ist \tilde{W} nicht leer. Man zeigt leicht, daß \tilde{W} abgeschlossen ist.

Sei $W_i = \{w \in \tilde{W} \mid a_i(w) = a_i \text{ für } i = 1, \dots, \mu \text{ und } b_i(w) = b_i \text{ für } i = \mu, \dots, n\}$. Auch W_0 ist nicht leer und abgeschlossen.

Sei $W_i = \{w \in W_{i-1} \mid b_i(w) \text{ maximal}\}$ für $i = 1, \dots, \mu - 1$ und $W_i = \{w \in W_{i-1} \mid a_{i+1}(w) \text{ minimal}\}$ für $i = \mu, \dots, n - 1$. Sei $v \in W_{n-1}$ und $p = f - v$.

Sei nun $q \in A$ mit schwachem Vorzeichenwechsel in $b_1(v), \dots, b_{\mu-1}(v), a_{\mu+1}(v), \dots, a_n(v)$.

Wegen der Zwischenbehauptung ist $q(x) = 0$. Zur Vereinfachung bezeichnen wir $\alpha_i := a_i(v)$ und $\beta_i := b_i(v)$. Für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ hat dann $p - \epsilon q$ eine n -stellige EA in $\beta_1, \dots, \beta_{\mu-1}, x, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_n$. Für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (p - \epsilon q)(t) &\leq p(t) && \text{für } t \in [a, \beta_1] \cup [\beta_2, \beta_3] \cup \dots, \\ &\geq p(t) && \text{für } t \in [\beta_1, \beta_2] \cup [\beta_3, \beta_4] \cup \dots, \end{aligned}$$

und für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (p - \epsilon q)(t) &> -\|p\| && \text{für } t \in [a, \beta_1] \cup [\beta_2, \beta_3] \cup \dots, \\ &< \|p\| && \text{für } t \in [\beta_1, \beta_2] \cup [\beta_3, \beta_4] \cup \dots. \end{aligned}$$

Wegen $q \not\equiv 0$ gibt es ein kleinstes $\bar{\epsilon} > 0$, so daß für ein $y \in M$ in einer der Ungleichungen (+) Gleichheit auftritt. Sei $\tilde{r} = p - \bar{\epsilon}q$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $y < x$. Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) Gilt $y < \beta_1$, so hat \tilde{r} in $y, \beta_1, \dots, \beta_{\mu-1}, x, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_n$ eine $(n + 1)$ -stellige EA im Widerspruch zur Annahme $k = n$.

(2) Gilt $y \in (\beta_{i-1}, \beta_i)$ für ein $i \in \{2, \dots, \mu - 1\}$, so folgt $\tilde{r}(\beta_{i-1}) = \tilde{r}(y) = -\tilde{r}(\beta_i) = + \|r\|$.

Dann ist entweder β_{i-1} nicht maximal, oder es gibt ein $z \in (\beta_{i-1}, y)$ mit $\tilde{r}(z) = r(\beta_i)$, und \tilde{r} hat eine $(n + 1)$ -stellige EA, in beiden Fällen ein Widerspruch.

(3) Ist $y \in (\beta_{\mu-1}, x)$, so folgt wie bei (2), daß entweder $\beta_{\mu-1}$ nicht maximal ist oder ein $z \in (\beta_{\mu-1}, y)$ mit $\tilde{r}(z) = \tilde{r}(x)$ existiert und \tilde{r} also eine $(n + 2)$ -stellige EA hat.

Die beiden folgenden Aussagen stellen in gewisser Weise Umkehrungen von Satz 2 dar.

SATZ 3. Sei U schwach Haarsch und $f \in C(M)$. Dann ist jedes $g \in U$, für das $r = f - g$ eine $(n + 1)$ -stellige EA hat, eine beste Approximation an $f \in U$.

Zum Beweis benutzen wir einen Spezialfall des Kolmogoroff-Kriteriums (siehe z.B. Schönhage [5, S. 149]):

LEMMA 2. $g \in U$ ist genau dann eine beste Approximation an $f \in C(M)$, wenn für jedes $h \in U$ ein $x \in \{t \in M \mid |(f - g)(t)| = \|f - g\|\}$ mit $(f - g)(x) \cdot h(x) \leq 0$ existiert.

Beweis von Satz 3. Da U schwach Haarsch ist, hat kein $h \in U$ eine starke Alternante der Länge $n + 1$. Also gibt es für jedes $h \in U$ einen Punkt t der EA mit $r(t)h(t) \leq 0$, woraus mit Lemma 2, Satz 3 folgt.

SATZ 4. Gibt es zu jedem $f \in C(M)$ eine beste Approximation $g \in U$, für die $r = f - g$ eine $(n + 1)$ -stellige EA hat, so ist U ein schwach Haarscher Raum.

Zum Beweis verweisen wir aus die—in diesem Teil elegante—Argumentation von Jones and Karlovitz [3].

3. SPEZIALISIERUNG AUF HAARSCHER RÄUME

Ein n -dimensionaler schwach Haarscher Raum U heißt Haarscher Raum, wenn kein $f \in U \setminus \{0\}$ mehr als $n - 1$ Nullstellen hat. Das Analogon zu Satz 3 folgt aus diesem unmittelbar.

Das Analogon zu Satz 4 lautet:

SATZ 4'. Gibt es zu jedem $f \in C(M)$ genau eine beste Approximation $g \in U$, so ist U ein Haarscher Raum.

Der Beweis dieses Ergebnisses findet sich z.B. bei Cheney [1, S. 81], oder Haar [2].

Wir wollen nun einen gegenüber den bisherigen einfacheren Beweis des zu Satz 2 analogen Resultates geben.

SATZ 2'. Sei $f \in C(M)$ und U ein Haarscher Raum. Dann gibt es genau eine beste Approximation $g \in U$ an f , und $r = f - g$ hat eine $(n + 1)$ -stellige EA.

Beweis. Sei $g \in U$ eine beste Approximation an f , und k maximal, so daß $r = f - g$ in x_1, \dots, x_k eine k -stellige EA hat. Mit $x_0 := a$ und $x_{n+1} := b$ sei $E_i := \{x \in M \cap [x_{i-1}, x_{i+1}] \mid r(x) = r(x_i)\}$ für $i = 1, \dots, k$, und I_i das jeweils kleinste Intervall mit $E_i \subset I_i$. Wir nehmen an, es sei $k \leq n$.

Für $k = n, n - 2, n - 4, \dots$ sei $h \in U$ eine Funktion, die in den Lücken zwischen den I_i zusammen genau $n - 1$ Nullstellen hat, und zwar in jeder Lücke ungerade viele.

Für $k = n - 1, n - 3, \dots$ sei $h_1 \in U$ eine Funktion mit $h_1(\min I_1) = 0$, die außerdem in den Lücken zwischen den I_i zusammen genau $n - 2$ Nullstellen hat, und zwar in jeder Lücke ungerade viele. $h_2 \in U$ sei eine ebensolche Funktion, nur mit $h_2(\max I_k) = 0$ statt $h_1(\min I_1) = 0$, und schwach dem gleichen Vorzeichen wie h_1 in jedem Intervall I_i . Es sei $h = h_1 + h_2$.

In beiden Fällen erhält man ein $\tilde{h} \in U$ (entweder $\tilde{h} = h$ oder $\tilde{h} = -h$), das auf jedem I_i das gleiche Vorzeichen wie r auf E_i hat. Also ist für jedes $x \in E_1 \cup \dots \cup E_k$ $r(x) \cdot \tilde{h}(x) > 0$, und wegen Lemma 2 dann g keine beste Approximation an f . Also ist $k \geq n + 1$. Sei nun $\tilde{g} \in U$ eine andere beste Approximation an f , also $\|r\| = \|\tilde{r}\|$ für $\tilde{r} = f - \tilde{g}$. $r - \tilde{r} \in U$ hat in jeder EA von r eine schwache Alternante der Länge $n + 1$.

Da U ein Haarscher Raum ist, folgt $r = \tilde{r}$.

LITERATUR

1. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill, New York, 1966.
2. A. HAAR, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. *Math. Ann.* **78** (1918), 294-311.
3. R. C. JONES UND L. A. KARLOVITZ, Equioscillation under nonuniqueness in the approximation of continuous functions. *J. Approximation Theory* **3** (1970), 138-145.
4. S. KARLIN UND W. J. STUDDEN, "Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics," Wiley, New York, 1966.
5. A. SCHÖNHAGE, "Approximationstheorie," W. de Gruyter, Berlin 1971.
6. M. SOMMER UND H. STRAUSS, Eigenschaften von schwach Tschebyscheffschen Räumen, Institutsbericht Nr. 29 des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen, März 1976.
7. B. STOCKENBERG, Zur Struktur von Čebyšev- und schwachen Čebyšev-Räumen, Dissertation, Duisburg 1976.
8. R. ZIELKE, On Transforming a Tchebyshev-system into a Markov-system, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 357-366.